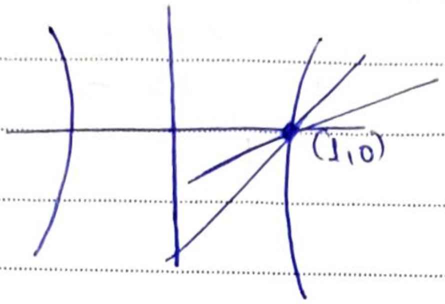
Άσκ 2: Να δείξω ότι η υπερβολή $V(x^2-y^2-1)$ είναι ρητή

Λύση



Θεωρώ την οικογένεια ευθειών

$y-0=t(x-1) \Rightarrow t=\frac{y}{x-1}$ (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} y=t(x-1) \quad (*) \\ x^2-y^2-1=0 \to x^2-t^2(x-1)^2-1=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$-y^2+(x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow (1-t^2)x^2+2t^2x-1-t^2=0$

μέσω διακρίνουσας $\left(\begin{array}{c} x=1 \\ \downarrow \\ y=0 \end{array}\right)$ ή $x=\frac{1+t^2}{t^2-1}$ $(**)$

$(*)\overset{(**)}{\Rightarrow} y=\frac{2t}{t^2-1}$ $\quad t\neq\pm1$

↳ πρέπει να εξαιρέσουμε το ±1 (Προσοχή) Σε αυτά τα σημεία, δεν υπάρχει η καμπύλη.

i) Πρέπει $\phi(x(t),y(t))=0$

Θ.δ.ο. $\left(\frac{1+t^2}{t^2-1}\right)^2-\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^2-1=0 \Rightarrow \frac{(1+t^2)^2-4t^2-(t^2-1)^2}{(t^2-1)^2}=$

$=\frac{1+2t^2+t^4-4t^2-t^4+2t^2-1}{(t^2-1)^2}=0$

ii) Πρέπει να δείξω ότι $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$

$\frac{t_0^2+1}{t_0^2-1}\overset{(1)}{=}\frac{\left(\frac{y_0}{x_0-1}\right)^2+1}{\left(\frac{y_0}{x_0-1}\right)^2-1}=\frac{y_0^2+(x_0-1)^2}{\frac{y_0^2+(x_0-1)^2}{\cancel{(x_0-1)^2}}}$

αφού $(x_0,y_0)\in C_\phi$ άρα επαληθεύει, άρα $y_0^2-x_0^2=-1$

$=\frac{y_0^2+x_0^2-2x_0+1}{\underbrace{y_0^2-x_0^2}_{=-1}+2x_0-1}=\frac{y_0^2+x_0^2-2x_0+1}{2(x_0-1)}=$

$= -1$ (προσθαφαιρώ το x_0^2)

$$= \frac{y_0^2 + x_0^2 - 2x_0 + 1 - x_0^2 + x_0^2}{2(x_0 - 1)} = \frac{2x_0^2 - 2x_0}{2(x_0-1)} = \frac{2x_0 \cancel{(x_0-1)}}{\cancel{2(x_0-1)}} = x_0.$$

και
$$y(t_0) = \frac{2t_0}{t_0^2 - 1} = \frac{2\frac{y_0}{x_0-1}}{\left(\frac{y_0}{x_0-1}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{2y_0}{x_0-1}}{\frac{y_0^2 - (x_0-1)^2}{(x_0-1)^2}} = \frac{2y_0(x_0-1)}{\underbrace{y_0^2 - x_0^2}_{=-1} + 2x_0 - 1} =$$

$$= \frac{2y_0(x_0-1)}{2(x_0-1)} = y_0$$

Η μοναδικότητα του t έπεται καθώς έχουμε (λόγω ευθειών) γραμμ. και υπάρχουν πεπερασμ. εφαπ. του $t \neq \pm 1$.

Εφαρμογές
1) Στις καμπύλες Fermat
2) Γεωμετρικός σχεδιασμός
3) Εύρεση σημείων τομής καμπυλών
4) Θεωρία αριθμών (δεν θα το κάνουμε)

1) Ορισμός: Ορίζουμε καμπύλη Fermat τις επίπεδες αλγεβρικές καμπύλες της μορφής $V(x^n + y^n - 1)$

Εφαρμογή 1 (*)

$V(x^n+y^n-1) \subseteq \mathbb{C}^2$

Οι καμπύλες Fermat για $n \geq 3$ δεν είναι ρητές (συνέχεια → →)

Πρόταση: Έστω $g \in \mathbb{R}[x]$ πολυώνυμο ανάγωγο και μη σταθερό (δηλ. $g \neq ct$).
Τότε $g^2 | f \Leftrightarrow g | f$ και $g | f'$

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Αν $g^2 | f \Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}[x]$ τέτοιο ώστε: $f = g^2 \cdot h = g(g h) \Rightarrow g|$

$f' = 2gg'h + g^2 h' = g(2g'h + gh') \Rightarrow g | f'$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $g|f$ και $g|f'$. Πρέπει να δείξω ότι $g^2|f$

$g|f \Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}[x]$ τ.ω. $f = g\cdot h \Rightarrow f' = g'\cdot h + g\cdot h' \xrightarrow[\substack{g|g\cdot h' \\ (\text{προφανώς})}]{g|f'}$

$g | g'\cdot h \xrightarrow[\text{αφού } g \text{ αναγ.}]{\text{αναγωγικότητα}} g|g'$ ή $g|h$

όμως $g|g'$ δεν γίνεται.

Άρα, $g|h$ και $\exists\, k \in \mathbb{R}[x]$: $\boxed{h = g\cdot k}$

$= g\cdot g\cdot k = g^2\cdot k \Rightarrow g^2 | f$

Εφαρμογή (*)

Έστω ότι $\exists\, n \geq 3$ έτσι ώστε η $V(x^n + y^n - 1)$ να είναι ρητή

$\Leftrightarrow \exists\, x(t), y(t) : f(x(t), y(t)) = 0 \Leftrightarrow (x(t))^n + (y(t))^n - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \exists$ πολυώνυμα $p(t), q(t), r(t) \in \mathbb{C}[t]$

$x(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}, \quad y(t) = \dfrac{r(t)}{q(t)}$ (**) (χβγ τα r, p, q όχι κοινό παράγοντα διαφορετικά απ' [illegible])

$p^n + r^n = q^n$ (1) χβγ υποθέτω ότι το r έχει μεγαλύτερο βαθμό ($\deg r \geq \deg p, \deg q$)

$\Downarrow$ παραγωγ. ως προς t

$np^{n-1}p' + n\cdot r^{n-1} r' = nq^{n-1}q'$ (2)

(1)$\cdot p' \Rightarrow p'p^n + p'\cdot r^n = p'q^n$ (3)

(2)$\cdot p \Rightarrow p'p^n + pr^{n-1}\cdot r' = pq^{n-1}q'$ (4)

(3) $-$ (4) $\Rightarrow p'r^n - pr'r^{n-1} = p'q^n - pq'q^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\neq 0}{r^{n-1}}(p'r - pr') = \underset{\neq 0}{q^{n-1}}(p'q - pq')$ $\quad$ (αν $\left(\frac{p}{r}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{r} = c \Leftrightarrow p = c\cdot r$)

$\Rightarrow$

Αν αναλύσω τα r, q σε ανάγωγες συνιστώσες τους και λάβω (**) οι αναγ. συνιστώσες του r^{n-1} εμφανίζονται υποχρεωτικά στο $p'q - pq' \Leftrightarrow r^{n-1} \mid p'q - pq' \Leftrightarrow p'q - pq' = k\cdot r^{n-1},\ k \in \mathbb{C}[t]$

$\Rightarrow \underbrace{\deg(p'q - pq')}_{\deg pq + \deg q - 1} = \deg k + \deg r^{n-1} \geq \deg r^{n-1} = (n-1)\deg r \geq 2\deg r =$
$= \deg r + \deg r \geq \deg p + \deg q$

$\deg p'q = \deg q + \deg p - 1$
$\qquad \|$
$\deg pq'$

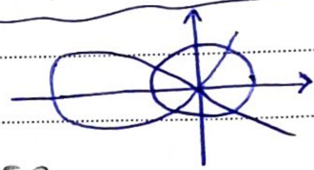
$n \geq 3 \Rightarrow n-1 \geq 2$

$\Rightarrow -1 \geq 0$ άτοπο

Εφαρμογή 3

Υπολογισμός τομής καμπυλών. Έστω $V(f)$, $V(g)$. Να βρεθεί η τομή τους.

$\boxed{V(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} \quad V(x^2+y^2-1)}$



Π.χ. Να βρεθεί η τομή των $V(x^2+y^2-1)$ και $V(y^2-x^3-x^2)$

Τα κοινά σημεία είναι η λύση του (Σ) $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y^2-x^3-x^2=0 \end{cases}$

Είχαμε δει ότι μια ρητή παραμ. της $V(y^2-x^3-x^2)$ είναι $x(t) = t^2-1$, $y(t) = t^3-t$

$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x = t^2-1 \\ y = t^3-t \end{cases} \Leftrightarrow (t^2-1)^2 + (t^3-t)^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow t^6 - t^4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t^4 - t^2 - 1) = 0$

$t^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t=0 \text{ διπλή ρίζα}}$ 2 σημεία.

ή

$t^4 - t^2 - 1 = 0 \overset{t^2=k}{\Longrightarrow} k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{t = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}}$

(4 σημεία)

Συνολικά, έχουμε 6 σημεία.

για $t=0$ έχουμε το $(-1,2)$ διπλό σημείο τομής)

Εφαρμογή 2: Γεωμετρικός σχεδιασμός

Σχεδιαστής: a) εύκολες

β) μεγάλη ποικιλία

γ) γρήγορες σε σχεδιασμό

Π.χ. Bezier (μηχανικός Renault)

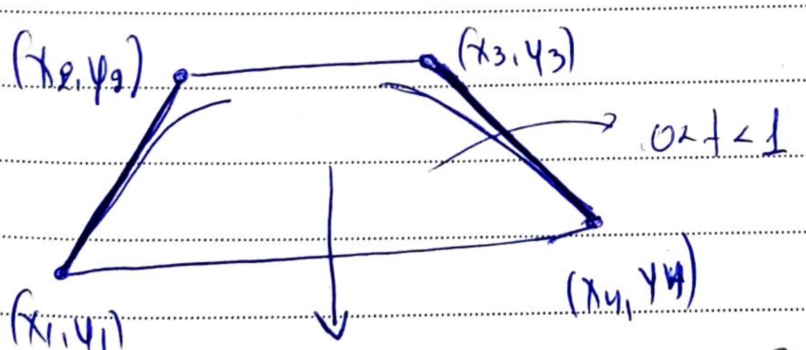
Εισάγει την καμπύλη:

$x(t) = (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3 x_4$

$y(t) = (1-t)^3 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t)y_3 + t^3 y_4$

Η καμπύλη αυτή για $t=0$ διέρχ. από (x_1, y_1)

$t=1$ " " (x_4, y_4)



καλείται τετράπλευρο ελέγχου

οι έντονες γραμμές / \ είναι εφαπτόμενες της καμπύλης στα σημεία (x_1, y_1), (x_4, y_4)

Bezier curves Αυτοκινήτων: Βιντεάκια στο YouTube που μπορεί να δω

Απαλοίφουσα

21/4/22

Έστω $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad , a_n \neq 0 \quad \in \mathbb{R}[x]$

$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m \quad , b_m \neq 0$

Έστω η ορίζουσα $(m+n)$ τάξης που ορίζεται ως εξής

$$
Res(f, g; x) = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 & & & 0 \\
\vdots & & & & b_m & 0 & \dots & & 0 \\
0 & 0 & b_0 & \dots & & & & b_{m-1} & b_m
\end{vmatrix}
$$

(τυχαία μπήκε εδώ)

και καλείται απαλοίφουσα των f, g.

Παράδειγμα : $f(x)=2x^2+3x+1$, $g(x)=7x^2+x+3 \in \mathbb{R}[x]$
$Res(f,g;x)$

Η Res θα είναι $2+2=4$ τάξης.

$$Res(f,g;x)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = 153$$

Ορισμός: Η $Re(f,f';x)$ καλείται διακρίνουσα του f.

Εφαρμογή Απαλοίφουσας

Έστω πολυώνυμο $f=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Πότε έχει διπλή ρίζα;

Λύση

$g^2 | f \iff g | f$ και $g | f'$ (είδαμε πιο πριν)

(Χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα) $\iff Res(f,f',x)=0 \iff Res(f,g,x)=0$
(διακρίνουσα)

π.χ. Εφαρμόζοντας σε πολυώνυμο 2ου βαθμού
ν.δ.ο. $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$, $\alpha_2\neq 0$ έχει διπλή ρίζα αν-ν $D=0$ Θω.Τ

Θεώρημα

Τα f, g έχουν κοινό παράγοντα μη σταθερό $\Leftrightarrow Res(f, g, x) = 0$